

**О новом диалектическом подходе
к математическому творчеству**

© 2025 г. Л.Г. Антипенко

Институт философии РАН, Москва, 109240, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: chistrod@yandex.ru

Поступила 01.06.2025

В статье ставится задача показать, как диалектическая форма мышления конкретизируется в виде нового диалектического подхода к математическому творчеству. Его философским основанием является фундаментальная онтология Мартина Хайдеггера, из которой заимствуется операция диалектического отрицания, именуемая *привацией*. Привация в своем предельном выражении находит место в паранепротиворечивой («Воображаемой») логике Н.А. Васильева, оперирующей логическими антиномиями и выявляющей их отличие от логических противоречий (от логического абсурда). В логико-математических изысканиях наглядным примером применения привации служат известные Гёделевы теоремы неполноты, в которых устанавливается существование целых положительных чисел со свойствами, противоположными свойствам индуктивных чисел (Н.Н. Лузин). В рамках поставленной задачи анализу подвергается дескриптивная теория множеств Лузина и неевклидова (гиперболическая) геометрия Лобачевского. Их объединяет проблема упорядочения арифметического континуума. В этом контексте ставится вопрос, почему множество вещественных точек континуума не является счетно-упорядоченным, и дается на него ответ. К ответу подводит описываемый здесь диалектический подход к математическому творчеству как часть логической дисциплины мышления, получившей название *комплементарно-диалектической логики*. Диалектический подход к математическому творчеству включает в себя преобразование математической логики, развитой на основе классической формальной логики. Это преобразование представлено в статье в виде синтеза экстенционального и интенционального аспектов логического мышления, которые часто именуют (для краткости) экстенциональной и интенциональной логикой.

Ключевые слова: фундаментальная онтология, привация, паранепротиворечивая логика, дескриптивная теория множеств, гиперболическая геометрия, виртуальные точки, Н.А. Васильев, Н.Н. Лузин.

DOI: 10.21146/0042-8744-2025-9-19-29

Цитирование: Антипенко Л.Г. О новом диалектическом подходе к математическому творчеству // Вопросы философии. 2025. № 9. С. 19–29.

On a New Dialectical Approach to Mathematical Creativity

© 2025 Leonid G. Antipenko

*Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1, Goncharnaya str., Moscow, 109240, Russian Federation.*

E-mail: chistrod@yandex.ru

Received 01.06.2025

The article sets the task to show how the dialectical form of thinking is concretized in the form of a new dialectical approach to mathematical creativity. Its philosophical basis is the fundamental ontology of Martin Heidegger, from which the operation of dialectical negation, called privation, is borrowed. Privation in its ultimate expression finds a place in the paraconsistent (“Imaginary”) logic of N.A. Vasiliev, operating with logical antinomies and revealing their difference from logical contradictions (from logical absurdity). In logical and mathematical research, a clear example of the application of privation are the well-known Gödel incompleteness theorems, which establish the existence of positive integers with properties opposite to the properties of inductive numbers (N.N. Luzin). Within the framework of the task, the descriptive set theory of Luzin and the non-Euclidean (hyperbolic) geometry of Lobachevsky are analyzed. They are united by the problem of ordering the arithmetic continuum. In this context, the question is posed as to why the set of real points of the continuum is not countably ordered, and an answer is given. The answer is provided by the dialectical approach to mathematical creativity described here as part of the logical discipline of thinking called complementary-dialectical logic. The dialectical approach to mathematical creativity includes the transformation of mathematical logic developed on the basis of classical formal logic. This transformation is presented in the article as a synthesis of the extensional and intensional aspects of logical thinking, which are often called (for brevity) extensional and intensional logic. Key words: fundamental ontology, privation, paraconsistent logic, descriptive set theory, hyperbolic geometry, virtual points.

Keywords: fundamental ontology, privation, paraconsistent logic, descriptive set theory, hyperbolic geometry, virtual points, N.A. Vasiliev, N.N. Luzin.

DOI: 10.21146/0042-8744-2025-9-19-29

Citation: Antipenko, Leonid G. (2025) “On a New Dialectical Approach to Mathematical Creativity”, *Voprosy filosofii*, Vol. 9 (2025), pp. 19–29.

Основной предпосылкой возникновения современного диалектического подхода к математическому творчеству служит круг тех идей и представлений, которые входят в содержание понятия *диалектики*. В традиционной метафизике, начиная еще с диалогов Платона, диалектика служила критерием выявления логических противоречий, которые вели к ошибкам и ложным выводам в процессах коллективного обсуждения тех или иных предметов или явлений. Здесь начинается классическая формальная логика, которая, как пишет Г.Х. фон Вригт, состоит в том, что она принимает в качестве бесспорно истинных два базисных принципа, впервые сформулированных Аристотелем и принятых как закон исключения противоречия и закон исключенного третьего. «Сомневаться в одном или в другом из них равносильно тому, чтобы ставить под сомнение

само разделение того, что называют логическим пространством, на две исчерпывающие и взаимоисключающие части» [Вригт фон 1992, 87].

Сомнению это положение подверг русский мыслитель Н.А. Васильев (1880–1940), создавший свою «Воображаемую логику», которую впоследствии назвали *паранепротиворечивой* логикой [Васильев 1989]. О ее связи с диалектическим подходом в логике будет сказано далее, а пока ограничимся замечанием, что она позволила установить в логическом мышлении критерий различия между логическими противоречиями и возникающими в нем антиномиями, которые совпадают с ними по форме. Антиномия отличается от логического противоречия тем, что она выводится с соблюдением всех законов и правил классической логики. Недостаток же «Воображаемой логики» в отношении диалектического подхода заключается в том, что в ней не находит выражения операция диалектического отрицания.

Диалектика во всяком случае оперирует противоположностями, и поэтому в ней должен был быть указан способ перехода от одной противоположности к другой. Первая попытка установить логическую операцию перехода принадлежит Гегелю. Он выразил ее в своей «Науке логики» посредством обращения к немецкому глаголу *zu aufheben*, который содержит в себе смысл, передаваемый совместно словами *исключать* и *сохранять* (что-то устраняется и что-то сохраняется). Схематично ее представляли как переход от тезиса к антитезису с возвращением к тезису: тезис – антитезис (отрицание) – синтез. Часто диалектическое отрицание называли «*снятием*». В целом «Наука логики» Гегеля представляет собой логическое изображение развития мирового духа с его двумя этапами самоотчуждения: на первом этапе возникает природа, время, человек и т.д., на втором этапе мировой дух возвращается к самому себе, будучи обогащенным в процессе предшествующего развития. Автор этой философской системы предстает как субъект, отображающий весь путь развития мирового духа и его конечный результат.

Серьезным недомыслием в гегелевской логике является то обстоятельство, что в ней имеет место произвол в отношении того, чем должен быть заполнен результат, представленный в виде синтеза тезиса и антитезиса. Ленин, высоко оценивая гегелевскую идею развития, представленную немецким философом на языке изобретенной им логики, пытался устранить ее недочеты, применив к ней системный подход.

* * *

В своих «Философских тетрадах» (статья «К вопросу о диалектике») Ленин указывал, что, обращаясь к центральному диалектическому понятию тождества (единства) противоположностей, нельзя довольствоваться только представлением суммы примеров, взятых из разных наук и философии, как это делают многие популисты (приводятся примеры таких противоположностей, как «дифференциал и интеграл» в математике, «действие и противодействие» в механике, «классовая борьба» в общественной науке и т.п.). В понятии тождества противоположностей, или в понятии их единства, писал он, находит признание (открытие) противоречивых, *взаимоисключающих*, противоположных тенденций во всех явлениях и процессах природы (и духа и общества в *том числе*). Условие познания всех процессов мира в их «*самодвижении*», в их спонтанном развитии, в их живой жизни, есть познание их как единства противоположностей. Развитие есть «борьба» противоположностей. «Две основные (или две возможные? или две в истории наблюдающиеся?) концепции развития (эволюции) суть: развитие как уменьшение и увеличение, как повторение, и развитие как единство противоположностей (раздвоение единого на взаимоисключающие противоположности и взаимоотношение между ними). При первой концепции движения остается в тени *само* движение, его *двигательная* сила, его мотив (или сей источник переносится *во вне* – бог, субъект etc.). При второй концепции главное внимание устремляется именно на познание *источника* “само” движения» [Ленин 1969, 317–318].

Здесь, однако, мысль остановилась перед вопросом о том, как охватить противоположности, заключенные в этом тождестве. И решение вопроса было найдено в фундаментальной онтологии Мартина Хайдеггера через обращение к времени. Если в традиционной метафизике онтология преподносилась как учение о сущем, то Хайдеггер наполнил ее новым содержанием посредством соотношения трех понятий: сущего (Seiende), Бытия (Seyn) и вот-бытия (Dasein). Вот-бытие есть у него человек, который, с одной стороны, принадлежит сущему, с другой стороны – Бытию. Сущее и Бытие обозначаются одним и тем же древнегреческим термином *ὄν*, но он принимает по отношению к сущему роль существительного, а по отношению к Бытию – роль глагола (подробнее см. в: [Хайдеггер 2022, 569]). Глагол органически связан с присущим Бытию (вместе с вот-бытием) временем. Хайдеггер называет время истиной Бытия [Хайдеггер 1993, 32]. Можно сказать, что время есть универсальная мера Бытия, и поэтому поляризация (раздвоение времени на противоположности) относится и к поляризации Бытия.

Здесь же мы находим операцию диалектического отрицания, которая называется *привацией*. Ее определение имеет следующее выражение: «Если мы нечто отрицаем так, что не просто исключаем, а, скорее, фиксируем в смысле недостачи, то такое отрицание называют *привацией* (*Privation*)» [Хайдеггер 2012, 86]. Опыт применения привации по отношению к времени и по отношению к Бытию позволяет показать, как она работает в области логической дисциплины мысли и в математическом творчестве.

Привация времени означает, что времени как таковому недостает времени на то, чтобы затрачивать свой ресурс на акты перехода от настоящего к прошлому или к будущему. Получается так потому, что, по словам Хайдеггера, все три измерения времени – прошлое, настоящее и будущее – равнозначальны. Ни одного из них нет без других, все три для нас *равноизначально* открыты, но так, что если мы вступаем в одно, то два других не исчезают, а только модифицируются в том смысле, что подвергаются привации [Там же, 89]. На современном квантово-физическом языке можно сказать так, что от каждого *теперь* разлетаются элементарные временные кристаллы в двух противоположных направлениях – в сторону будущего и в сторону прошлого, но с разной квантово-статистической весомостью, которой определяется наблюдаемое нами усредненное время с его направленностью. Смена направленности усредненного времени тоже стоит под вопросом.

Привация Бытия означает недостачу Бытия, которая выражается посредством термина *Ничто*. Ничто как указатель недостачи есть вместе с тем предметом того, что должно быть возведено на нем. Здесь мы видим задачу, которая находится в рамках общеполитического осмысления. Подойти к ее решению нам поможет наблюдение за тем, как применяется привация в конкретных случаях, к каким результатам она приводит в логике и математике.

Будем исходить из того, что имеются аналоги по отношению к *Ничто* (назовем их *нулевыми маркерами*) в ряде математических концепций: нуль в алгебре, пустое множество в математической теории множеств, нулевая производная в теории комплексных функций и т.д. В каждом из этих случаев решается или остается нерешенной задача восполнения недостачи данной концепции. В рамках классической логики таким аналогом предстает пустой класс в булевой алгебре, лежащей в основе этой логики. Вот здесь и открывается переход к диалектическому подходу в логике. Заключается он в том, что экстенциональный аспект логического мышления дополняется интенциональным аспектом, или, иначе говоря, реализуется синтез этих аспектов. Иногда их просто называют логикой экстенциональной и логикой интенциональной. Различие между ними определяется различием понятий экстенционала и интенционала¹. Интенционал и экстенционал суть две парные категории семантики, обозначающие смысл и значение языкового выражения. *Интенционал* есть термин, обозначающий содержание слова-понятия, то есть совокупность мыслимых признаков объекта, охватываемых данным понятием. *Экстенционал* есть термин, обозначающий объем слова-понятия, то есть совокупность объектов, охватываемых данным понятием. В области математики

господствует представление о том, что какие бы выкладки в ней ни производились с привлечением понятия о свойстве объекта, все они могут быть с не меньшим успехом выполнены посредством обращения к понятию класса всех объектов, обладающих этим свойством. При этом четче становится представление о тождестве и различии двух классов, поскольку мы можем указать, состоят или не состоят эти классы из одних и тех же элементов. И создается впечатление, что во всех логико-математических суждениях нет нужды обращаться к интенциональному аспекту логики.

Однако возникает вопрос, как быть в том случае, когда мы рассматриваем объекты с противоположными свойствами, например с индуктивными и неиндуктивными числами (Н.Н. Лузин [Лузин 1993, 25]) в теоремах К. Гёделя о неполноте [Gödel 1965]. Чтобы ответить на этот вопрос, нам надо познакомиться с концепцией *логического*, разработанной А. Тарским (1901–1983) [Tarski 1986]. Концепция широко распространена в логико-математическом сообществе, и нам надо выяснить, насколько она удовлетворяет логическим запросам.

Есть задача, пишет Тарский, рассмотреть понятия, обозначаемые терминами, которые могли бы быть определены внутри какой-либо из существующих систем логики, например *Principia Mathematica* [Whitehead, Russell 1910–1913]. Есть основания полагать, что используемые в данной системе термины суть логические по своему смыслу. Их можно было бы включить в большинство учебников по логике при соответствующем изложении. Всякое понятие, взятое из *Principia Mathematica* или из какой-либо известной системы логики, является инвариантным при каждой однозначной трансформации «мира» или «универсума дискурса» в себя [Tarski 1986, 150].

Далее он разбирает примеры логических понятий систематическим образом, начиная с самых простых категорий или типов и двигаясь к более сложным типам. Ставится вопрос: найдутся ли образцы логических понятий самой низкой категории среди индивидов? Ответ отрицателен, потому что мы всегда можем найти такую трансформацию мира в себя, при которой один индивид преобразуется в иной индивид. А вот на следующем уровне, на котором берутся классы индивидов, дело обстоит иначе. На нем имеется точно два класса, выступающие в роли логических индивидов. Это универсальный класс и пустой класс. Только эти два класса являются инвариантными при трансформации универсума в себя. Кроме того, если целые положительные числа определить как свойства классов или как классы классов, то и они будут удовлетворять данному критерию инвариантности. Тарский полагает, что именно они могут быть представлены в качестве индивидов, и с их множествами приходится работать в логическом дискурсе.

Действительно, пишет автор, мы не можем, имея два класса, отличить их друг от друга, если каждый из них имеет точно два индивида, потому что если вы имеете два класса, каждый из которых состоит из двух индивидов, вы всегда можете найти трансформацию универсума, при которой один из двух классов трансформируется в другой. «Каждое логическое свойство, принадлежащее одному классу из двух индивидов, принадлежит каждому классу, содержащему в точности два индивида» [Ibid., 151]. В контексте экстенциональной логики так и есть: понятие числа как свойство класса удовлетворяет критерию логического, сформулированного Тарским. Однако когда мы переходим к индуктивному определению числа, с которым работают математики, то должны считаться с теоремами неполноты Гёделя, которые свидетельствуют о том, что числа могут преобразовываться в числа с противоположными свойствами. Непонимание этого приводит к тому, что экстенциональная логика Тарского сталкивается с парадоксами, которые в одних случаях суть логические противоречия (логический абсурд), в других случаях суть антиномии, совпадающие по форме с логическими противоречиями².

Вот здесь и возникает необходимость обращения к синтезу экстенциональной и интенциональной логики. Для этого интенциональная логика представляется в виде паранепротиворечивой логики Васильева. Взаимопроникновение двух этих логик приводит к тому, что устанавливается водораздел между логическими противоречиями и антиномиями.

Выше уже было сказано, что антиномии как таковые выводятся с соблюдением всех законов и правил экстенциональной логики. Поскольку антиномиям *предстоит* разрешение, то диалектическую логику, выполняющую эту задачу, можно назвать модальной логикой.

Напоминаем, что в булевой алгебре представлены два противоположных класса, обозначаемые как 1 и 0, то есть универсальный класс и пустой класс. В исчислении высказываний универсальному классу соответствует истинное высказывание, пустому классу – ложное высказывание. Булева алгебра налагает на импликацию «если, то» требования, согласно которым из ложного высказывания следует как истинное, так и ложное высказывание; из истинного высказывания следует только истинное высказывание. Эти требования служат условием того, что в логически правильном дискурсе не могут возникать логические противоречия. Во избежание путаницы с терминами *истина* и *ложь* мы будем смотреть на знаки p и $\neg p$ как на обозначения для утвердительных и отрицательных суждений. В рамках экстенциональной логики их обычно отождествляют с терминами *истина* и *ложь*, что согласуется с законом исключенного третьего. Но приватия экстенциональной логики приводит, в порядке компенсации недостачи, к тому, что к утвердительному суждению p и отрицательному суждению $\neg p$ добавляется суждение $p \wedge \neg p$. Получается трехвалентная логика, в которой третью позицию Н.А. Васильев назвал *индифферентной* по форме. Эта формула $p \wedge \neg p$ и представляет собой антиномию, которую предстоит разрешить. Три указанные валентности подаются в его логике вместе с законом исключенного четвертого. К этому добавляется принцип абсолютного различия между Истиной и Ложью, что исключает конъюнкцию метапредикатов *истинное* и *ложное* [Васильев 1989, 107].

Теперь о том, что и как нас сюда привело. Обратимся к одному логическому закону, который был открыт в геометрических началах Евклида.

Речь идет о содержащейся в них теореме 12 (книга IX), имеющей вид:

$$(\neg p \supset p) \supset p \quad (1)$$

Читается так: «Утверждаем, что если из того, что p ложно, следует, что p истинно, то p истинно». С другой стороны, дается противоположный по форме закон:

$$(p \supset \neg p) \supset \neg p \quad (2)$$

Эти логические законы и служат основанием для перехода к логической антиномии. П.А. Флоренский показал, как выглядит этот переход. Если кто-то утверждает тезис p , тогда можно сделать вывод, что он ложен, если только имеет место (2). Согласно правилу отделения (*modus ponens*), получаем:

$$\frac{(p \supset \neg p) \supset \neg p, (p \supset \neg p)}{\neg p} \quad (3)$$

Но этот вывод является отчасти условным. Закон (2) в отношении вывода (3) имеет силу лишь в том случае, если из не- p не следует p . Если же наряду с формулой $(p \supset \neg p)$ имеет место и формула $(\neg p \supset p)$, тогда получаем антиномию:

$$(p \wedge \neg p) \quad (4)$$

Флоренский был первым, кто указал, что антиномия отличается от логического противоречия (абсурда) в том смысле, что представляет собой умозаключение, сделанное при соблюдении всех законов и правил вывода элементарной логики [Хайдеггер 2022, 148–153]. Происходит она обычно из аксиоматики, в которой могут быть заложены логические противоречия.

На примере логической антиномии Рассела (множество всех нормальных множеств и нормально, и не нормально) мы видим, что антиномия представляет собой контрадикторное сочетание двух ее противоположных аспектов по типу перехода от конечного к бесконечному [Васильев 1989, 123].

Перейдем теперь к математическому содержанию диалектической логики. Здесь надо отметить, что в этом отношении наиболее весомый вклад в диалектический подход в логику внес Н.Н. Лузин в развитой им дескриптивной теории множеств. Она

существенно отличается от всех других известных вариантов математической теории множеств (теория Цермело – Френкеля, теория фон Неймана – Бернаиса – Гёделя, теория Бурбаки и т.д.). Если для них нулевым маркером (показателем их неполноты, недостатки) служит пустое множество, то у Лузина эту роль выполняет множество точек, которые он назвал *виртуальными* точками (иногда он называл их *неопределенными* точками). Заведомо можно сказать так, что если обычные вещественные точки в теории множеств несут на себе печать пространственности, то виртуальные – печать временной стихии.

Посмотрим теперь, как Лузин подошел к этой концепции, имеющей отношение к диалектическому подходу. Для этого надо познакомиться с представлением о *мере* точечного множества. Мера точечного множества есть обобщающее понятие длины линейного промежутка, площади прямоугольника, объема параллелепипеда и т.д. Хотя в теории множеств используются разные типы меры (с именами Бореля, Лебега, Жордана), все они несут на себе следы пространственности. Ход мысли Лузина к своим открытиям начинался с рассмотрения измеримых (на отрезке $[0,1]$) борелевских множеств, обозначаемых как «измеримость B ». Затем последовало рассмотрение более широкого, введенного Лебегом, класса множеств, удовлетворяющих критерию борелевской меры. И, наконец, были сконструированы *проективные множества*, в которых и появились неопределенные, или виртуальные, точки. Лузин указывал, что если добавить к операциям дополнения и объединения (множеств) операцию ортогонального проектирования, «то мы получим – в предположении, что рассматриваются множества в евклидовых пространствах R^m любых конечных размерностей – в точности все проективные множества» [Лузин 1958, 94].

Центральное место в концепции проективных множеств и виртуальных точек занимает проблема, которую Лузин назвал проблемой Лебега. Эта проблема совпадает с задачей, которая относится к континуум-гипотезе Кантора. Разобраться с этими вопросами нам отчасти поможет статья В.А. Успенского [Успенский 1985]. Излагая основные положения дескриптивной теории множеств, Успенский сообщает о том, как подошли к истолкованию виртуальных точек представители французской математической школы. В ней шла острая дискуссия в отношении того, что означают, применительно к математике, такие понятия и термины, как «определенное» (*défini*) и «описанное» (*décrit*), «выбрать» (*choisir*) и «назвать» (*nommer*). В этих терминах и была сформулирована проблема Лебега. Успенский напомнил о том, что в канторовской теории множеств алеф-один есть мощность всех не более чем счетных порядковых чисел, другими словами – наименьшая из мощностей несчетных, вполне упорядоченных множеств. «С принятием аксиомы выбора алеф-один становится просто наименьшей несчетной мощностью, и, таким образом, на действительной прямой R существует множество из алеф-один точек. Это наблюдение оставляет открытым следующий вопрос: можно ли назвать совокупность точек континуума на R , имеющих мощность алеф-один?» [Там же, 88].

Далее он отметил, что проблему, названную «проблемой Лебега», сформулировал именно Лузин. А на вопрос о том, каковы же на самом деле множества точек действительной прямой, которые следует считать «законными» или «хорошо определенными» (*“bien définis”*), дал ответ, состоящий из следующих соображений. Хотя точную границу между «хорошими» и «нехорошими» множествами указать невозможно, имеется достаточно большой запас множеств, заведомо признанных законными. Нетрудно понять, что за все время, как прошедшее, так и будущее, существования цивилизации могут быть названы (посредством текстов сколь угодно большой, но конечной длины, составленных из букв произвольного, но фиксированного конечного алфавита) не более чем счетное количество действительных чисел. «В то же время множества, состоящие из одного действительного числа, обычно трактуются как “хорошо определенные”. Таким образом, “хорошо определенных множеств” существенно больше, чем называемых. В этом противоречии между счетностью – и, может быть, и конечностью – запаса называемых объектов и несчетностью континуума можно видеть одну из причин трудностей оснований математики» [Лузин 1958, 89–90].

Для Лузина же множество всех вещественных точек (действительных чисел) является счетным, а вот пересчитать их или упорядочить нельзя, потому что этому мешают виртуальные точки, которые Лузин вначале называл «паразитическими». Выделяя из континуума иррациональные числа, он писал: «Вполне определимых иррациональных чисел имеется лишь счетное множество. <...> Арифметический континуум заведомо содержит неопределимые точки. <...> Эти точки <...> являются паразитическими. <...> В этом заключается единственное объяснение трудностей теории» [Лузин 1958, 269]. Теперь мы имеем возможность эту трудность устранить, открывая логическую связь между дескриптивной теорией множеств и неевклидовой (гиперболической) геометрией Лобачевского. Геометрия Лобачевского позволяет ответить на вопрос о том, откуда берутся эти неопределимые, или виртуальные, точки и какова их функция. В геометрическом контексте математики они обычно фигурируют под названием *идеальных* точек, которые востребованы при преобразовании проективной геометрии в геометрию гиперболическую. Мы заимствуем описание их вместе с соответствующими понятиями прямых и плоскостей из книги Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» [Курант, Роббинс 2022]. Проективная геометрия определяется как группа проективных преобразований геометрических фигур, при которых сохраняются их определенные свойства. Проективным преобразованием называется всякое отображение одной фигуры на другую, получающееся посредством проектирования, центрального или параллельного, или же посредством конечной последовательности таких проектирований [Там же, 194].

Далее говорится о том, что обыкновенная геометрия точек и прямых весьма осложнена тем обстоятельством, что две параллельные прямые не имеют точки пересечения. Это побудило геометров сделать одно примечательное упоминание в ее структуре путем расширения понятия геометрической точки, которое вбирает в себя и обыкновенную, и «идеальную» точку. Последнюю можно представить так, что если прямая, пересекающая другую прямую, медленно вращается, приближаясь к положению параллельности, то точка пересечения двух прямых неограниченно удаляется, что дает повод утверждать, что две параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке [Там же, 207]. Итак, пишут авторы, *мы уславливаемся в том, что к обыкновенным точкам всякой прямой добавляем еще одну, «идеальную» точку и будем считать эту точку принадлежащей всем прямым, параллельным данной, и никаким другим.* «Следствием такого условия является то, что всякая пара прямых на плоскости теперь уже пересекается в единственной точке: если прямые не параллельны, то в «обыкновенной» точке; если параллельны, то в им обеим принадлежащей «идеальной» точке. По причинам интуитивного порядка эта идеальная точка на прямой называется *бесконечно удаленной точкой* на этой прямой» [Там же, 208].

То обстоятельство, согласно которому множество бесконечно удаленных точек на плоскости (в проективной геометрии) образует бесконечно удаленную прямую, натолкнуло Ф. Клейна на мысль, что бесконечно удаленную прямую можно было бы присоединить к обыкновенной прямой, чтобы получить (определить) геодезическую линию на плоскости Лобачевского. «Гиперболическая геометрия, – писал он, – наделяет прямую двумя бесконечно удаленными точками. О том, существует ли по ту сторону еще один участок прямой, дополняющий до замкнутой линии участок, лежащий в конечной области, сказать ничего нельзя, так как наши движения никогда не доводят нас до бесконечно удаленных точек, не говоря уже о том, чтобы выйти за их пределы. Во всяком случае, можно присоединить такой участок как мысленную, идеальную часть прямой линии» [Клейн 1956, 268]. Это суждение Клейна себя не оправдало, а вот множество «идеальных» точек, введенных в геометрию посредством проективных преобразований, высветило себя как показатель недостатка, неполноты точечного континуума на прямой Евклида. Отсюда – добавление к множеству действительных (вещественных) чисел, расположенных на евклидовой прямой, мнимых чисел, в результате чего и возникло представление о прямой Лобачевского со всеми вытекающими отсюда следствиями. (К числу этих следствий относится наличие двух бесконечно удаленных точек, в которых пересекаются две параллельные Лобачевского (слева и справа) с исходной прямой (см.: [Антипенко 2023].)

Вернемся к вопросу о том, что непосредственно не позволяет упорядочить арифметический континуум. Для этого выпишем два уравнения, определяющие взаимоотношения между сторонами и углами треугольника на сферической поверхности и на плоскости Лобачевского. Первое уравнение имеет вид:

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \alpha, \quad (A)$$

где b и c – стороны треугольника, содержащие угол α , a – сторона, лежащая напротив этого угла, R – радиус сферы.

Второе уравнение представлено по аналогии с первым в виде:

$$ch \frac{a}{R} = ch \frac{b}{R} ch \frac{c}{R} - sh \frac{b}{R} sh \frac{c}{R} \cos \alpha \quad (B)$$

Уравнение (B) получается из (A) путем замены R на iR с тем дополнительным условием, что R приравнивается определенной линейной величине k_L , которую будем называть константой Лобачевского (речь идет о геометрической константе, которую К. Гаусс называл «абсолютной длиной»).

По аналогии с тригонометрической формулой (A), реализующейся на сфере, принято поверхность, на которой реализуется тригонометрическая формула (B), называть сферой мнимого радиуса, или псевдосферой [Ефимов 1961, 192]. Особенность псевдосферы состоит в том, что на ней соприкасаются две точки, мнимая и вещественная. Мнимая точка есть конечная точка мнимого радиуса iR , вещественная точка есть точка, принадлежащая геодезической линии на псевдосфере. Плоскость Лобачевского можно было бы представить как двустороннюю поверхность в том смысле, что с одной стороны она усеяна вещественными точками, а с противоположной стороны – мнимыми. И такое представление было бы правильным, если бы не происходило постоянное взаимопревращение точек вещественных в точки мнимые и обратно [Антипенко 2022, 83–84]. Точка a , расположенная в континууме на числовой оси, может превратиться в точку ia и в точку $-ia$, и при этом уравнение (B) останется неизменным. Стало быть, здесь геометрический детерминизм превращается в стохастический процесс, и мы можем судить только о вероятности двух разных точечных превращений. С другой стороны, в этом процессе переход от одной мнимой точки к другой мнимой точке представляет собой геометрическое отображение времени.

Еще одна трудность в понимании гиперболической геометрии заключается в ответе на вопрос о том, как мнимость проникла в геометрический континуум, если геометрическая практика и теория линейных измерений оперирует образом линейных отрезков, составленных из вещественных точек и соответствующих им чисел. Ответ заключается в том, что ввести мнимые числа в геометрический континуум позволяет константа Лобачевского k_L (так я называю абсолютную единицу длины, функционирующей в данной геометрии). Действительно, мы можем выразить длину отрезка l геодезической линии в виде отношения lk_L , а затем, умножая данное отношение на мнимую единицу i , получить тем самым множество мнимых точек в дополнение к множеству вещественных точек. Здесь геометрическая точка на прямой определяется как бесконечная последовательность стягивающихся интервалов [Лузин 1933, 27].

* * *

Итак, подведем итоги представленных размышлений о диалектическом подходе в логике, который мы будем *mutatis mutandis* называть комплементарно-диалектической логикой. Со стороны математического творчества основная заслуга в этом деле принадлежит Н.Н. Лузину. Развита им дескриптивная теория множеств вместе с вытекающими из нее выводами тесно связана с его представлением о бесконечности, о существовании бесконечных объектов. Когда речь идет, писал он, о бесконечности, то только

натуральный ряд целых положительных чисел 1, 2, 3, 4, ... дает совершенно ясное и *положительное* изображение. Понятие несчетной бесконечности является *чисто* отрицательным, не имеющим никакой объективной реальности. Это понятие, вызванное лишь человеческой способностью доказательства «от противного», не соответствует никакой достижимой реальности и меняется от поля к полю. «Если мы будем изменять поле законов, “существования” и “несуществования” математического объекта могут даже быть переставлены, так же как кронекеровская регулярность в некотором поле» [Лузин 1958, 441]. Отсюда его сомнение в правомерности канторовой попытки установить различие между счетно-бесконечными и несчетными множествами.

Отсюда его подход к решению двух следующих вопросов. Первый вопрос: «Можно ли или нет рассматривать “математическим образом” протяженность как множество точек?» (имеются в виду вещественные точки) [Там же, 193]. Второй вопрос: если, вопреки всяким возражениям, установлено, что вполне определенных иррациональных чисел имеется лишь счетное множество, почему их перенумерование не может быть осуществлено при помощи *математического* закона? Ответы на эти вопросы состоят, по Лузину, в том, что в точечную протяженность включается динамический фактор, который выражается посредством виртуальных точек.

Виртуальные – значит обладающие потенцией превращаться в реальные (в математическом смысле) точки. Но эти недостающие (мнимые) точки привносятся в континуум не извне, а путем превращения наличных в нем вещественных точек в мнимые с двояким результатом (см. выше). В этом (повторим еще раз) и заключается причина того, почему нельзя упорядочить (исчислить) арифметический континуум. Лузин писал о себе, что он как автор «склонен рассматривать построенные им примеры (проективных множеств. – Л.А.) как словесные образования, определяющие не действительно законченные объекты, а лишь виртуальности» [Там же, 268]. Логическая оценка проективных множеств заключается в его высказывании, что область проективных множеств «есть область, где принцип исключенного третьего уже неприменим, хотя всякое проективное множество формально определимо при помощи счетного множества условий» [Там же]. Лузин выявил в теории множеств антиномию, которая получила разрешение в неевклидовой геометрии Лобачевского.

Примечания

¹ Термин *интенционал* происходит от лат. *intentio* (стремление, намерение, усилие); термин *экстенционал* – от *extensio* (протяжение, расширение).

² Наглядным примером антиномического суждения служит известная антиномия Рассела [Whitehead, Russell 1910, 80–81]).

Источники – Primary Sources and Translations

Васильев 1989 – *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. М.: Наука, 1989 (Vasiliev, Nikolai A., *Imaginary Logic*, in Russian).

Вригт фон 1992 – *Вригт фон Г.Х.* Логика и философия в XX веке // Вопросы философии. 1992. № 8. С. 80–91 (Wright von, Henrik G., *Logic and Philosophy in the Twentieth Century*, Russian Translation).

Ефимов 1961 – *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. 4-е изд. М.: Госиздат. физико-математической литературы, 1961 (Efimov, Nikolai V., *Higher Geometry*, in Russian).

Клейн 1956 – *Клейн Ф.* О так называемой не-евклидовой геометрии // Об основаниях геометрии / Под ред. А.П. Норден. М.: Гостехиздат, 1956. С. 253–303 (Klein, Felix Ch., *Über sogenannte nicht-euklidische Geometrie*, Russian Translation).

Курант, Роббинс 2022 – *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? 10-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2022 (Courant, Richard, Robbins, Herbert, *What Is Mathematics?*, Russian Translation).

Ленин 1969 – *Ленин В.И.* Полное собр. соч. 5-е изд. Т. 29. М.: Издательство политической литературы, 1969 (Lenin, Vladimir I., *Collected Works*, Vol. 29, in Russian).

Лузин 1933 – *Лузин Н.Н.* Современное состояние теории функций действительного переменного. М.; Л.: ГТТИ, 1933 (Luzin, Nikolai N., *Contemporary State of the Complex-Variable Function Theory*, in Russian).

Лузин 1958 – Лузин Н.Н. Собр. соч. Т. II: Дескриптивная теория множеств. М.: Изд-во АН СССР, 1958 (Luzin, Nikolai N., *Collected Works. Vol. II: Descriptive Set Theory*, in Russian).

Лузин 1993 – Лузин Н.Н. Об арифметических методах математиков XVII века // Вопросы истории естествознания и техники. 1993. № 4. С. 25–35 (Luzin, Nikolai N., *On the Arithmetical Methods of the XVII Century Mathematicians*, in Russian).

Хайдеггер 1993 – Хайдеггер М. Время и бытие: статьи и выступления / Пер. с нем. М.: Республика, 1993 (Heidegger, Martin, *Time and Being: Papers and Speeches*, Russian Translation).

Хайдеггер 2012 – Хайдеггер М. Цолликоновские семинары / Пер. с нем. яз. И. Глухой. Вильнюс: ЕГУ, 2012 (Heidegger, Martin, *Zollikoner Seminare*, Russian Translation).

Хайдеггер 2022 – Хайдеггер М. Заметки I–V (Черные тетради 1942–1948) / Пер. с нем. А.Б. Григорьева под науч. ред. М. Маяцкого. М.: Изд. Института Гайдара, 2022 (Heidegger, Martin, *Anmerkungen I–V. Schwarze Hefte 1942–1948*, Russian Translation).

Gödel, Kurt (1965) “On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems”, Davis, Martin, ed., *The Undecidable*, Hewlett, New York, pp. 4–38.

Tarski, Alfred (1986) “What are Logical Notions?”, Corcoran, John., ed., *History and Philosophy of Logic*, Buffalo; New York, pp. 143–154.

Whitehead, Alfred N., Russell, Bertrand (1910–1913) *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.

Ссылки – References in Russian

Антипенко 2023 – Антипенко Л.Г. О геометрической картине мира в свете фундаментальной онтологии Хайдеггера // Метафизика. 2023. № 4 (50). С. 87–100.

Антипенко 2022 – Антипенко Л.Г. Проблема неполноты математической теории и онтологические предпосылки ее решения. М.: ЛЕНАНД, 2022.

Успенский 1985 – Успенский В.А. Вклад Н.Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 3 (243). С. 85–116.

References

Antipenko, Leonid G. (2022) *The Problem of Incompleteness of Mathematic Theory and Ontological Presuppositions of Its Solution*, Lenand, Moscow (in Russian).

Antipenko, Leonid G. (2023) “On the Geometric Picture of the World in the Light of Heidegger’s Ontology”, *Metafizika*, Vol. 4 (50), pp. 87–100 (in Russian).

Uspensky, Vladimir A. (1985) “N.N. Luzin’s Contribution in Descriptive Set and Functions Theory: Concepts, Problems, Predictions”, *Uspekhi matematicheskikh nauk / UMN*, Vol. 40, Iss. 3 (243), pp. 85–116 (in Russian).

Сведения об авторе

АНТИПЕНКО Леонид Григорьевич – кандидат философских наук, старший научный сотрудник сектора философии естественных наук, Институт философии РАН.

Author’s Information

ANTIPENKO Leonid G. – CSc in Philosophy, Senior Researcher, Department of the Philosophy of Natural Sciences, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.